

גיאומטריה אלגברית - תרגיל 8

שאלה 1. תהי X קבוצה אלגברית אפילו ויהיו $X_1, X_2 \subseteq X$ מ-קבוצות

סקורות של X כך ש- $X = X_1 \cup X_2$ ו- $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

(א) הראו כי X_1, X_2 סגורות ב- X .

(ב) יהי $f_1 \in F[X_1], f_2 \in F[X_2]$. נגדיר $f: X \rightarrow \mathbb{A}^1$ על ידי $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in X_1 \\ f_2(x) & x \in X_2 \end{cases}$. הוכיחו כי $f \in F[X]$.

(המס: הראו כי f רגולרית על X . אפשרו אתר מספיק הטארי-הסני).

שאלה 2. תהינה X, Y קבוצות אלגבריות, יהי $f: X \rightarrow Y$ מורפיזם, יהיו $V \subseteq Y$ סגורה

ועי $a \in X$ נקודה כך ש- $a \in V = f^{-1}(a)$. (סמן $U = f^{-1}(V)$).

תהי $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ פונקציה רגולרית ב- a .

הוכיחו כי $\mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_a$ רגולרית ב- a .

שאלה 3. יהי $f: X \rightarrow Y$ מורפיזם של קבוצות אלגבריות.

תהי $a \in X$ ו- $b = f(a)$. הישטו בשאלה 2 כי אגזור העתקה

של אלגברות $\mathcal{O}_{X,a} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,b}$ $f^*: \mathcal{O}_{Y,b} \rightarrow \mathcal{O}_{X,a}$ כך שאם $\varphi \in F[Y]$ אז $f^*[\varphi] = [\varphi \circ f]$. הוכיחו כי f^* מקצה היטה. אמן ציורן אבונה ש- f^* העתקה של אלגברות.

שאלה 4. תהי X קבוצה אלגברית. הוכיחו כי $\dim X = \max \{ \dim_a X \mid a \in X \}$.

שאלה 5. תהינה X, Y קבוצות אלגבריות, יהי $f: X \rightarrow Y$ מורפיזם.

תהי $a \in X$ ויהי $b = f(a)$. תהי $\delta: F[X] \rightarrow F$ רגולרית על X ב- a .

(כלומר $\delta \in \text{Der}_a X$). הוכיחו כי $\delta \circ f^*: F[Y] \rightarrow F$ רגולרית על Y ב- b .

שאלה 6. תהי $X = \{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \mid x^2 - 2yz = 0, -y^2 + xz = 0 \} \subseteq \mathbb{A}^3$.

בדקו האם X חלקה בנקודות $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,1), (2,1,1)$.

(אנחנו נלמד איך לפתור את זה בהרצאה של ה-27.12).